Title	Local dynamical structure of indeterminacy points of rational mappings (Integrated Research on Complex Dynamics and its Related Fields)
Author(s)	篠原, 知子
Citation	数理解析研究所講究録 (2010), 1699: 88-98
Issue Date	2010-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/141717
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1699巻2010年88-98

Local dynamical structure of indeterminacy points of rational mappings

Tomoko Shinohara
Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology
E-mail address: sinohara@s.metro-cit.ac.jp

篠原 知子
東京都立産業技術高等専門学校

1. Introduction.

この報告では，複素 m 次元射影空間 $\mathbf{P}^m$ 上の有理写像 F の固定的不定点 p における局所的な力学系構造の考察を行う．特に blow up を使って，p において F により不変な曲線からなる族 $\{W_j\}_{j\in J}$ を構成する．ただし，J はカントール集合 $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ の部分集合とする．

第2章では，記号と用語を準備し，これまでに得られた複素2次元射影空間 $\mathbf{P}^2$ 上の結果を紹介する．第3章では，2次元の結果を不定点集合 I の次元に着目しながら，より高次元へ拡張する．特に，dim I=0 の時は2次元と同様の不変曲線の族を定義するための点列が得られることを示す．また，dim I=1 の時は，ある具体的な写像に対して I を含み，F により不変な曲面が存在することを示す．

2. 2次元の場合のまとめ

この章では記号と用語を用意し，これまでに得られた2次元の場合の結果を紹介する．詳しくは [4], [5] を参照して欲しい．

$f_i(x_1,x_2,x_3)(i=0,1,2)$ を次数 d の斉次多項式，$F:[x_1:x_2:x_3]\mapsto[f_0:f_1:f_2]$ を $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像，$G:(x_1,x_2,x_3)\mapsto(f_0,f_1,f_2)$ を $\mathbf{C}^3$ 上の多項式写像とする．このとき，$\tilde{\pi}\circ G=F\circ\tilde{\pi}$ が $\mathbf{C}^3$ からある解析的集合を除いたところで成立する．ここで，$\tilde{\pi}:\mathbf{C}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbf{P}^2$ は**標準的射影**とする．$G(\tilde{p})=(0,0,0)$ がある点 $\tilde{p}\in\pi^{-1}(p)$ に対して成り立つとき，点 $p\in\mathbf{P}^2$ は F の**不定点**であるという．一般に，p が不定点であるとき，$\bigcap_{U_p}\overline{F(U_p\setminus\{p\})}$ は一点にならない．ただし U_p は p の任意の開集合とする．これより，F は点 p で不連続であることに注意する．不定点 p が $p\in\bigcap_{U_p}\overline{F(U_p\setminus\{p\})}$ を満たすとき**固定的不定点**とよぶことにする．固定的不定点は連続写像の不動点の定義を拡張したものである．このとき，p の任意の近傍 U_p に対し，$F(U_p\setminus\{p\})\cap U_p\neq\emptyset$ が成り立つことから，固定的不定点においては，不動点と同様の力学系構造の存在が期待できる．

この報告では $\mathbf{P}^2$ の有理写像 $F:\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^2$ は点 $p=[0:0:1]$ を不定点に持つとする．$\mathbf{P}^2$ の部分集合 $U_3:=\{[x_1:x_2:x_3]\in\mathbf{P}^2 \mid x_3\neq 0\}$ を

$$[x_1:x_2:x_3]\mapsto\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)$$

により，局所座標近傍 $\mathbf{C}^2$ と同一視する．この座標で点 p は原点 $p=(0,0)$ となることに注意する．$\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1$ の部分集合 X を次の様に定義する．

$$X:=\left\{(x_1,x_2)\times[l_1:l_2]\in\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1 \mid x_1l_2-x_2l_1=0\right\}.$$

このとき，X は次の2つの座標近傍系 $\{(U^j,\mu^j)\}_{j=1,2}$ により $\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1$ の部分多様体となることが定義より直ちにわかる．

$$U^1:=\left\{(x_1,x_2)\times[l_1:l_2]\in X \;\middle|\; x_2=\frac{l_2}{l_1}x_1\right\},$$

$$\mu^1:U^1\to\mathbf{C}^2,(x_1,x_2)\times[l_1:l_2]\mapsto\left(x_1,\frac{l_2}{l_1}\right),$$

$$U^2:=\left\{(x_1,x_2)\times[l_1:l_2]\in X \;\middle|\; x_1=\frac{l_1}{l_2}x_2\right\},$$

$$\mu^2:U^2\to\mathbf{C}^2,(x_1,x_2)\times[l_1:l_2]\mapsto\left(\frac{l_1}{l_2},x_2\right).$$

Definition 1. ([3]). 第一成分への射影 $\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1\to\mathbf{C}^2$ の X への制限を $\pi:X\to\mathbf{C}^2$ とする．この写像 π を，$p=(0,0)$ を中心とする $\mathbf{C}^2$ の **blow up** と定義する．また，X の部分集合 $E:=\pi^{-1}(0,0)=(0,0)\times\mathbf{P}^1$ を π の除外曲線と呼ぶ.

ここで，$\pi:X\setminus E\to\mathbf{C}^2\setminus\{(0,0)\}$ は双正則写像であることに注意しておく．

固定的不定点における局所的な力学系構造の研究は Y. Yamagishi ([6],[7]) により始められた．本研究はこの結果を基にしているので，ここではそれを紹介する．まず，合成写像 $\tilde{F}:=F\circ\pi:X\to\mathbf{P}^2$ を定義し，$\tilde{F}$ が次の条件を満たすと仮定する．

$$(A.0)\begin{cases}\tilde{F}\text{ は }E\text{ のある近傍上正則であり，}\tilde{F}^{-1}(p)\cap E=\{p_1,p_2\}\text{ である．}\\ \text{点 }p_i\text{ のある開近傍 }N_i\text{ が存在し，}\tilde{F}\text{ は }N_i\text{ 上双正則写像となる．}\end{cases}$$

ただし $i=1,2$ とする．条件 $(A.0)$ を仮定すると，点 p は F の固定的不定点になることに注意する．彼は更に，$\tilde{F}$ が N_i 上，ある方向に縮小的であると仮定した．この条件の下，点 p を通る 1 次元複素多様体 W_j の族で構成される，点 p の局所安定集合 $\{W_j\}_{j\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}}$ が存在することを示した．この集合族はカントールブーケと呼ば

れる．カントールブーケは，連続写像の鞍点に存在する安定多様体に対応する．鞍点の場合，安定多様体は 1 つの 1 次元複素多様体であるが，カントールブーケはカントール集合により順序づけられる曲線族であり，より複雑な力学系構造を持っている．この報告ではカントールブーケの定義を拡張した次の様な族を考える．

Definition 2. ([5]). 点 p を通る曲線の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が次を満たすとき，F により p で局所的に不変であるという．
(1) ある連続関数の族 $\phi_\lambda : \Delta_{\rho_\lambda} \to \mathbf{C}$ が存在し

$$W_\lambda = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2 \;\middle|\; x_2 = \phi_\lambda(x_1),\ x_1 \in \Delta_{\rho_\lambda}\right\},\ \phi_\lambda(0) = 0$$

を満たす．但し $\Delta_{\rho_\lambda} := \left\{x_1 \in \mathbf{C} \;\middle|\; |x_1| < \rho_\lambda\right\}$.

(2) 任意の曲線 W_λ に対し，ある $\lambda' \in \Lambda$ と点 p のある開近傍 $N_{\lambda'}$ が存在し，次が成り立つ:
任意の $x_1 \in \Delta_{\rho_\lambda} \setminus \{0\}$ に対し，$F(x_1, \phi_\lambda(x_1)) \cap N_{\lambda'} \subset W_{\lambda'}$, $\lim_{x_1\to 0} F(x_1, \phi_\lambda(x_1)) = p$.

以上の準備の下，これまでに得た $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像の不定点に関する結果を述べる．F が条件 (A.0) を満たすとき次の主張が成り立つ．

$$(A.1)\begin{cases} (1)\ F_0 := \pi^{-1}\circ\tilde{F} \text{ は } N(E) \text{ 上の有理型写像であり，点 } p_1, p_2 \text{ は } F_0 \text{ の} \\ \qquad \text{不定点である．} \\ (2)\ \tilde{F}_{j_1}|_{E_{j_1}} : E_{j_1} \to E \text{ は全単射であるので，} p_{j_1 j_2} := \tilde{F}_{j_1}^{-1}(p_{j_2}) \in E_{j_1} \\ \qquad \text{とおくことができる．更にこのとき，点 } p_{j_1 j_2} \text{ のある開近傍 } N_{j_1 j_2} \text{が} \\ \qquad \text{存在し，} \tilde{F}_{j_1} \text{ は } N_{j_1 j_2} \text{ 上双正則写像となる．} \end{cases}$$

ただし，$N(E)$ は除外曲線 E のある開近傍，$\pi_{j_1} : X_{j_1} \to X$ は点 p_{j_1} を中心とする X の blow up，$\tilde{F}_{j_1} := F_0 \circ \pi_{j_1} : X_{j_1} \to X$ とする．

Theorem 1. ([5]). この過程を帰納的に繰り返すことで，無限回の blow up $\pi_{j_1\cdots j_{n+1}} : X_{j_1\cdots j_{n+1}} \to X_{j_1\cdots j_n}$ を定義することができ，任意の記号列 $j = (j_1, j_2, \ldots) \in \{1,2\}^{\mathbf{N}}$ に対し，点列 $p_{j_1\cdots j_{n+1}} \in X_{j_1\cdots j_n}$ を得ることができる．

記号列の定義については Figure 1 を見て欲しい．この点列 $p_{j_1\cdots j_n}$ を用いて，不定点 p の近傍 N_p の最大不変集合 $\bigcap_{k\geq 0}^{\infty} F^{-k}(N_p^n) \cap N_p^n$ を特徴づけることができる．

Theorem 2. 任意の $n \in \mathbf{N}$ と点 p の十分小の任意の近傍 N_p^n に対し，点 $p_{j_1\cdots j_n}$ の

開近傍 $N_{j_1\cdots j_n}$ で次を満たすものが存在する.

(1) $F^{-n}(N_p^n) \cap N_p^n = \bigcup_{j_i \in \{1,2\}} \pi \circ \pi_{j_1} \circ \cdots \pi_{j_1\cdots j_{n-1}}(N_{j_1\cdots j_{n-1}}) \cap N_p^n$,

(2) $\bigcap_{k\geq 1}^{\infty} F^{-k}(N_p^n) \cap N_p^n \subset F^{-n}(N_p^n) \cap N_p^n = \bigcup_{j_i \in \{1,2\}} \pi \circ \pi_{j_1} \circ \cdots \pi_{j_1\cdots j_{n-1}}(N_{j_1\cdots j_n}) \cap N_p^n$.

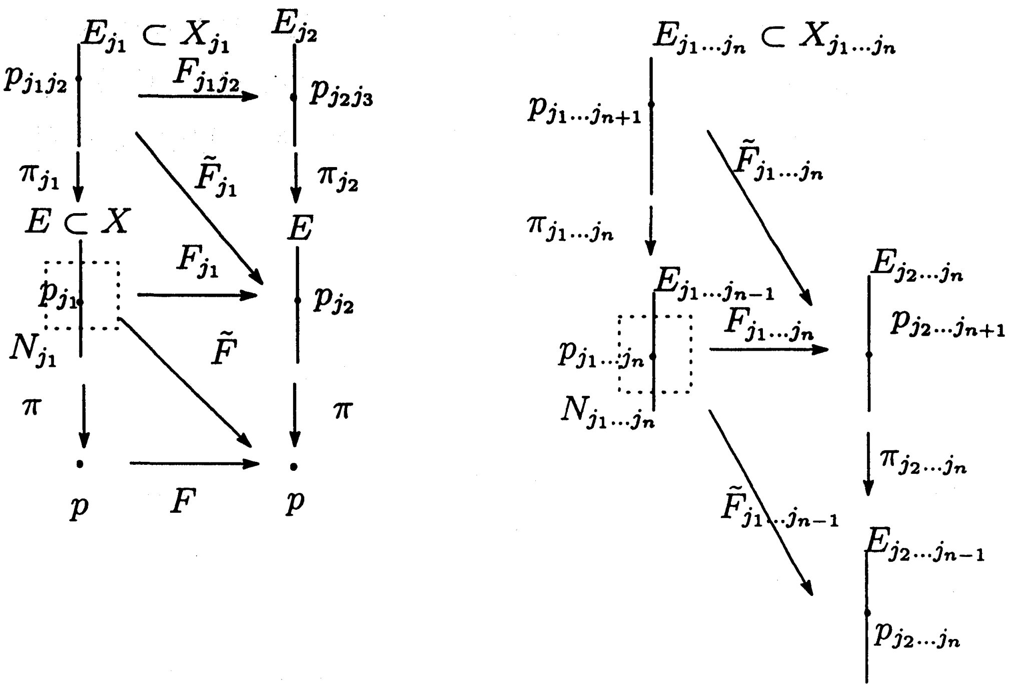

Figure 1

Remark. (2) の主張より, N_p^n の最大不変集合が点 p を通る 2^n 個の部分集合の族により外側から近似されることがわかる.

議論を進めるために, 次の条件 (B) を更に仮定する.

(B) 任意の $n \in \mathrm{N}$ に対し $p_{j_1\cdots j_n} \in U^1_{j_1\cdots j_{n-1}}$,

ただし $U^1_{j_1\cdots j_{n-1}}$ は X の座標近傍 U^1 と同様に定義した, $X_{j_1\cdots j_{n-1}}$ の座標近傍とする. $U^1_{j_1\cdots j_n}$ の座標を用いて, $p_{j_1\cdots j_n} = (0, \alpha_{j_1\cdots j_n})$ とおく. この点列を用いて, 任意の記号列 $j \in \{1,2\}^{\mathbf{N}}$, $j = (j_1, j_2, \ldots)$ に対し, 形式的べき級数

$$x_2 = \phi_j(x_1) := \alpha_{j_1} x_1 + \alpha_{j_1 j_2} x_1^2 + \cdots,$$

と記号列の空間

$$J := \left\{ j \in \{1,2\}^{\mathbf{N}} \mid \rho_j > 0 \right\}, \text{ ただし } \rho_j \text{ は } \phi_j \text{ の収束半径},$$

と任意の $j \in J$ に対する ϕ_j のグラフ

$$V_j := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2 \mid x_2 = \phi_j(x_1),\ x_1 \in \Delta_{\rho_j}\right\}$$

を定義する．このとき，次の結果を得る．

Theorem 3. ([5]). $\{V_j\}_{j\in J}$ は F により p で局所的に不変な最大の曲線族である．ここで，最大の族であるとは，任意の F により p で不変な曲線族 $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \{V_j\}_{j\in J}$ が成り立つこととする（この包含関係は連続曲線の芽の意味とする）．

応用として次の $\mathbf{C}^2$ 上の有理写像の力学系を考察する．

$$F(x_1, x_2) = \left(ax_1, \frac{x_2(x_2 - x_1)}{x_1^2}\right), \quad |a| > 4 \cdots (*1)$$

$$F(x_1, x_2) = \left(x_1 + ax_1^2, \frac{x_2(2x_2 - x_1)}{x_1^2}\right), \quad a \neq 0 \cdots (*2)$$

$\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ の部分集合 J_0 を次の様に定義する．

$$J_0 := \left\{j \in \{1,2\}^{\mathbf{N}} \,\middle|\, j_n = 2 \text{ となる } n \in \mathbf{N} \text{ が有限個.}\right\}.$$

(*1) の F に対しては次の定理が成り立つ．

Theorem 4. ([5]). 任意の記号列 $j = (j_1, j_2, \ldots) \in \{1,2\}^{\mathbf{N}}$ に対し，次のどちらかの主張が成り立つ．
(1) $j \in J_0$ のとき, ある自然数 n_0 が存在し，任意の $n \geq n_0$ に対し $j_n = 1$ となる．このとき $V_j \neq \emptyset$ かつ $V_j = F^{-n_0}(V_{11\ldots}) = F^{-n_0}(\{x_2 = 0\})$ が成り立つ．
(2) $j \notin J_0$ のとき, $V_j = \emptyset$ である．
これより，p で F により不変な曲線族 $\{V_j\}_{j\in J_0}$ を得ることができる．また，$|a| > 4$ の仮定より，この $\{V_j\}_{j\in J_0}$ は点 p の局所不安定集合であることに注意する．

(*2) の有理写像に対しては次の定理が成り立つ．

Theorem 5. ([4]). 任意の記号列 $j \in \{1,2\}^{\mathbf{N}}$ に対し，ある Δ_δ 上の連続関数 $x_2 = \psi_j(x_1)$ が存在する．$x_2 = \psi_j(x_1)$ のグラフを次の様におく．

$$W_j := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2 \,\middle|\, x_2 = \psi_j(x_1),\ x_1 \in \Delta_\delta\right\}.$$

このとき $\{W_j\}_{j\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}}$ は p で F により局所的に不変な曲線族である.

形式的べき級数 $\phi_{j'}(x_1)=\sum \alpha_{j'_1\cdots j'_n}x_1^n$ が関数 $\psi_j(x_1)$ の漸近展開であるとは，次が成り立つことである:
任意の $n\in\mathbf{N}$ に対し，ある定数 $\delta_n>0$ と $M_n>0$ が存在し，任意の $x_1\in\Delta_{\delta_n}$ に対し，次が成り立つ.

$$\left|\psi_j(x_1)-\alpha_{j'_1}x_1-\cdots-\alpha_{j'_1\cdots j'_{n-1}}x_1^{n-1}\right|\leq M_n|x_1|^n.$$

このとき，次の定理が成り立つ.

Theorem 6. ([4]). 任意の記号列 $j\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ に対し, ある記号列 $j'=(j'_1,j'_2,\ldots)\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ で，形式的べき級数 $\phi_{j'}(x_1)=\sum \alpha_{j'_1\cdots j'_n}x_1^n$ が関数 $\psi_j(x_1)$ の漸近展開となるものが存在する.

Remark. (*2) の F の場合，F の第一成分が $x_1+ax_1^2$ であることより W_j は点 p の局所安定集合と局所不安定集合を共に含むことがわかる．また，ψ_j は一般に $x_1=0$ で解析的でない．ψ_j が収束べき級数でない場合でも，$\phi_{j'}$ が漸近展開であることから，任意に固定した $n\in\mathbf{N}$ に対し，$x_1\to 0$ とすると $\psi_j(x_1)$ は多項式 $\alpha_{j'_1}x_1+\cdots+\alpha_{j'_{n-1}}x_1^{n-1}$ により近似されることがわかる.

3. 3 次元以上の場合.

これより先，F は $F:\mathbf{P}^m\to\mathbf{P}^m$ $(m\geq 3)$ の有理写像とする．F の不定点集合 I の次元は $\dim I\leq m-2$ であることが知られている ([2])．まず，$\dim I=0$ の場合を考察する．このとき I は点集合になるので，条件 $(A.0)$ を $\mathbf{P}^2$ の場合と全く同じように与えることで，Theorem 1, 2 を証明することができる．よって任意の記号列 $j\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ に対して点列 $\{p_{j_1\cdots j_n}\}$ を得る．また，Theorem 2 (2) の主張より，任意の $n\in\mathbf{N}$ と点 p の十分小の近傍 N_p^n に対し，任意の点 $p_{j_1\cdots j_n}$ の開近傍 $N_{j_1\cdots j_n}$ で次を満たすものが存在する.

$$\bigcap_{k\geq 1}^{\infty}F^{-k}(N_p^n)\cap N_p^n\subset\bigcup_{j_i\in\{1,2\}}\pi\circ\pi_{j_1}\circ\cdots\circ\pi_{j_1\cdots j_{n-1}}(N_{j_1\cdots j_n})\cap N_p^n.$$

ここで F が条件 (B) を満たしているとし，$p_{j_1\cdots j_n}$ の $U^1_{j_1\cdots j_{n-1}}$ での座標を $p_{j_1\cdots j_n}:=(0,\alpha^2_{j_1\cdots j_n},\cdots,\alpha^m_{j_1\cdots j_n})$ とおく．また，十分小の $\epsilon>0$ に対し

$$N_{j_1\cdots j_{n+1}}=\left\{(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbf{C}^m\;\middle|\;|x_1|<\epsilon,\cdots,|x_m|<\epsilon\right\}$$

とおくと次が成り立つ.

$$\begin{aligned}&\pi\circ\pi_{j_1}\circ\cdots\circ\pi_{j_1\cdots j_n}(N_{j_1\cdots j_{n+1}})\\&=\Big\{(x_1,\cdots x_m)\in\mathbf{C}^m\ \Big|\ |x_1|<\epsilon,\ |x_2-\alpha^2_{j_1}x_1-\cdots-\alpha^2_{j_1\cdots j_n}x^n|<\epsilon,\\&\qquad\qquad\cdots,|x_m-\alpha^m_{j_1}x_1-\cdots-\alpha^m_{j_1\cdots j_n}x_1^n|<\epsilon\Big\}.\end{aligned}$$

この事実より，$\mathbf{P}^2$ の場合と同様に，N_p^n の最大不変集合 $\bigcap_{k\geq 1}^{\infty}F^{-k}(N_p^n)\cap N_p^n$ が空でない場合，$\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ によって番号づけられる曲線族の集合を含むと予想している.

次に $\dim I{=}1$ の場合を考察する．以下，簡単のため F は $\mathbf{P}^3$ 上の有理写像であるとし，$I:=\Big\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{C}^3\ \Big|\ x_2=x_3=0\Big\}$ であるとする．$\mathbf{C}^2$ の場合と同様に，$\mathbf{C}^3\times\mathbf{P}^1$ の部分集合 X を

$$X:=\Big\{(x_1,x_2,x_3)\times[l_2:l_3]\in\mathbf{C}^3\times\mathbf{P}^1\mid x_3l_2-x_2l_3=0\Big\}$$

とおく．第一成分への射影 $\pi:\mathbf{C}^3\times\mathbf{P}^1\to\mathbf{C}^3$ の X への制限 $\pi:X\to\mathbf{C}^3$ を I を中心とする **blow up** と定義する．$E:=\pi^{-1}(I)$ とおくと，定義より $E=I\times\mathbf{P}^1$ が成立する．E を π の除外曲面と呼ぶ．X は次の 2 つの座標近傍系 $\{(U^j,\mu^j)\}_{j=2,3}$ により $\mathbf{C}^3\times\mathbf{P}^1$ の部分多様体となることがわかる.

$$\begin{aligned}U^2&:=\Big\{(x_1,x_2,x_3)\times[l_2:l_3]\in X\ \Big|\ l_2\neq 0\Big\},\\\mu^2:U^2\to\mathbf{C}^3,&\quad(x_1,x_2,x_3)\times[l_2:l_3]\mapsto\Big(x_1,x_2,\frac{l_3}{l_2}\Big),\\U^3&:=\Big\{(x_1,x_2,x_3)\times[l_2:l_3]\in X\ \Big|\ l_3\neq 0\Big\},\\\mu^3:U^3\to\mathbf{C}^3,&\quad(x_1,x_2,x_3)\times[l_2:l_3]\mapsto\Big(x_1,\frac{l_2}{l_3},x_3\Big).\end{aligned}$$

合成写像 $\tilde{F}:=F\circ\pi:X\to\mathbf{P}^3$ を考え，$\tilde{F}$ が E 上正則であると仮定する．I の近傍で F の最大不変集合が存在するために，$\tilde{F}(E)\cap I\neq\emptyset$ と仮定する．このとき，$I\not\subset\tilde{F}(E)$ と $I\subset\tilde{F}(E)$ の 2 つの場合があるが，以下では $I\subset\tilde{F}(E)$ の場合を考えることにする．このとき

$$\bigcap_N F(N\setminus I)\supset I,\qquad \text{但し}, N\ \text{は}\ I\ \text{の任意の開近傍},$$

が成り立つので，$I\subset\tilde{F}(E)$ の条件は $\mathbf{P}^2$ の固定的不定点の定義と類似のものになっている．以下では，次の有理写像について考える.

$$F:\mathbf{C}^3\to\mathbf{C}^3,\quad(x_1,x_2,x_3)\mapsto\left(x_1,x_2,\frac{x_3}{x_2}-\psi(x_1)\right),$$

但し，$\psi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ は $x_1 = 0$ でのべき級数展開が $\psi(x_1) = \sum_{i=1} b_i x_1^i$ で与えられる正則関数とする．このとき，合成写像 $\tilde{F} := F \circ \pi$ は U^2 上

$$\tilde{F}|_{U^2} = F \circ \pi|_{U_2}(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_3 - \psi(z_1))$$

であり，$E \cap U^2 = \{(z_1, z_2, z_3) \in U^2 \mid z_2 = 0\}$ 上，双正則写像である．また，$I_1 := \tilde{F}^{-1}(I) \cap E$ とすると $I_1 = \{(z_1, z_2, z_3) \in U^2 \mid z_2 = 0,\ z_3 = \psi(z_1)\}$ となる．詳しくは Figure 2 を参考にして欲しい．

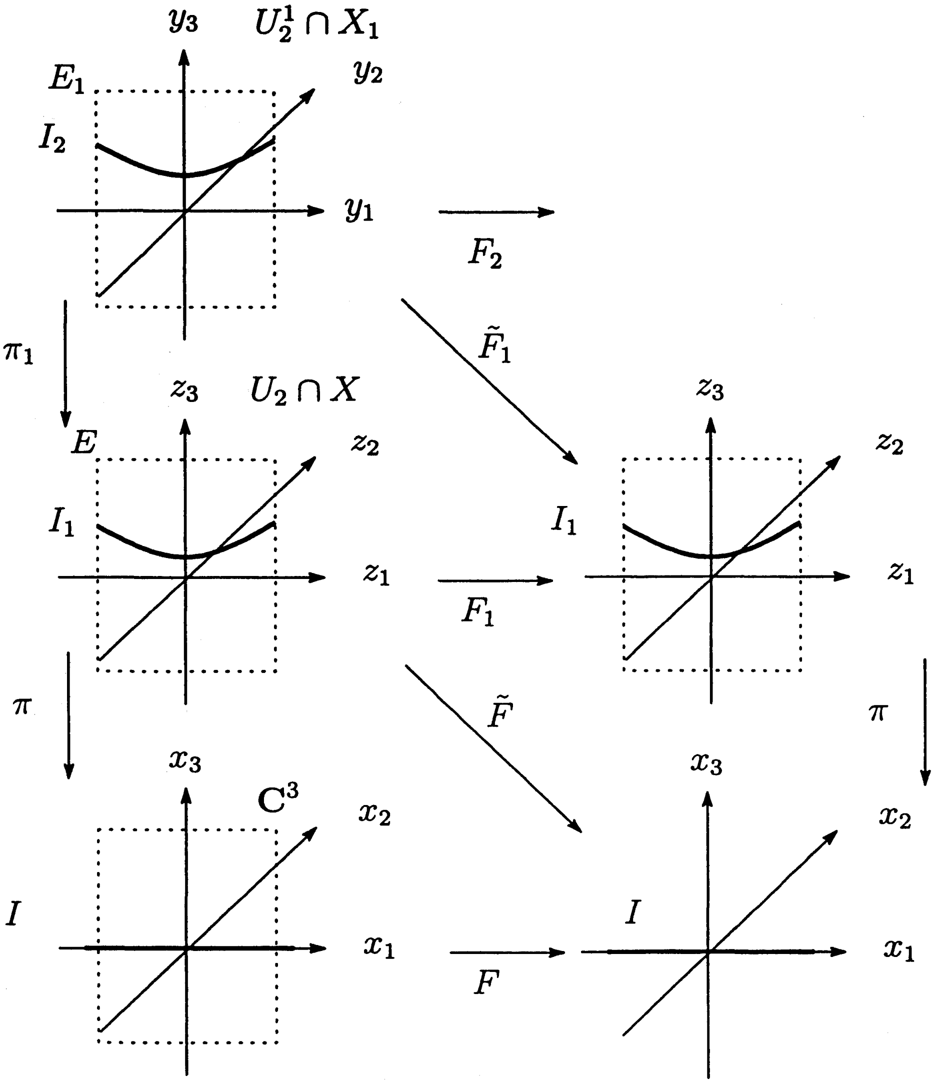

Figure 2.

この F に対し，次の問を考察する．

Question.

$$V := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3 \;\middle|\; x_3 = \phi(x_1, x_2) := \sum_{i+j \geq 1,\ j \geq 1} a_{ij} x_1^i x_2^j \right\}$$

とおく．このとき $V \supset I$ であることに注意する．$F(V) \supset I$ を満たすための V の必要条件を求めよ．

$V_1 := \overline{\pi^{-1}(V \setminus I)}$ とおくと次の補題が成り立つ．

Lemma 1. $F(V) \supset I$ を仮定すると次が成り立つ．
(1) $V_1 = \left\{(z_1, z_2, z_3) \in U_2 \;\middle|\; z_3 = \sum_{i+j \geq 1,\ j \geq 1} a_{ij} z_1^i z_2^{j-1}\right\}$.
(2) $V_1 \cap E = I_1$.
(3) $a_{01} = 0$．また，任意の $i \geq 1$ に対し $a_{i1} = b_i$.

証明．$\pi|_{U_2}(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_2 z_3) =: (x_1, x_2, x_3)$ とおく．これを V の定義式 $x_3 = \sum_{i+j \geq 1, j \geq 1} a_{ij} x_1^i x_2^j$ に代入すると (1) が得られる．
(2) は blow up の定義と，$F(V) \supset I$ の仮定より得られる．
(2) より，$\sum_{i \geq 0} a_{i1} z_1^i = \sum_{i \geq 1} b_i z_1^i$ であることから，(3) の主張を得る．　□

E の近傍で合成写像 $F_1 := \pi^{-1} \circ \tilde{F}(z_1, z_2, z_3) = \left(z_1, z_2, \dfrac{z_3 - \psi(z_1)}{z_2}\right)$ を考える．F_1 は I_1 を不定集合に持つことが定義よりわかる．$U^2 \times \mathbf{P}^1$ の部分集合 X_1 を

$$X_1 := \left\{(z_1, z_2, z_3) \times [l_2 : l_3] \in U^2 \times \mathbf{P}^1 \;\middle|\; z_2 l_3 = (z_3 - \psi(z_1)) l_2\right\}$$

とおく．第一成分への射影 $U^2 \times \mathbf{P}^1 \to U^2$ の X_1 への制限 $\pi_1 : X_1 \to U^2$ を I_1 を中心とする X の blow up と定義する．X_1 の座標近傍系 $\{(U_1^i, \mu_1^i)\}_{i=2,3}$ を X の座標近傍系 $\{(U^i, \mu^i)\}_{i=2,3}$ と全く同様に定義する．$(y_1, y_2, y_3) \in U_1^2$ に対し，$\pi_1|_{U_2}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_2 y_3 + \psi(y_1))$ となる．定義より，

$$\tilde{F}_1 := F_1 \circ \pi_1(y_1, y_2, y_3), \quad I_2 := \tilde{F}_1^{-1}(I_1), \quad F_2 := \pi_1^{-1} \circ \tilde{F}_1 \text{ とおくと}$$

$$\tilde{F}_1 = (y_1, y_2, y_3), \quad I_2 = I_1, \quad F_2 = F_1$$

であることがわかる．帰納的にこの手順を繰り返すことで任意の $n \geq 1$ に対し，$I_n = I_1$, $\tilde{F}_n = id.$, $F_n = F_1$ を定義することができる．

$V_2 := \overline{\pi_1^{-1}(V_1 \setminus I_1)}$ とおく．このとき，次の補題を得る．

Lemma 2. 次が成り立つ．
(1) $V_2 := \left\{(y_1, y_2, y_3) \in U_2^1 \;\middle|\; y_3 = \sum_{i+j \geq 2,\ j \geq 2} a_{ij} y_1^i y_2^{j-2}\right\}$.

(2) $V_2 \cap E_1 = I_2$.
(3) $a_{02} = 0$. 任意の $i \geq 1$ に対し $a_{i2} = b_i$.

証明. $\pi_1|_{U_2^1}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_2 y_3 + \psi(y_1)) =: (z_1, z_2, z_3)$ とおく. これを $z_3 = \sum_{i+j\geq 1,\ j\geq 1} a_{ij} z_1^i z_2^{j-1}$ に代入すると (1) が得られる.
blow up の定義より, $\tilde{F} \circ \pi_1 = \pi \circ \tilde{F}_1$ であるから (2) の主張 $V_2 \cap E_1 = I_2$ が得られる.
(2) より, $\sum_{i\geq 0} a_{i2} y_1^i = \sum_{i\geq 1} b_i y_1^i$ であることから (3) の主張を得る. □

この過程を帰納的に繰り返すことで, Question の答えである次の主張を得る.

Lemma 3. $F(V) \supset V$ を仮定すると次が成り立つ.
(1) $V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3 \;\middle|\; x_3 = \sum_{i+j\geq 1,\ j\geq 1} b_i x_1^i x_2^j\right\}$.
(2) V は形式的に, $F(V) = V$ を満たす.

証明. (1) は明らか. (2) を示すため, $(x_1, x_2, x_3) \in V$ に対し,

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_2, \frac{x_3}{x_2} - \psi(x_1)\right) =: (X_1, X_2, X_3) \text{ とおく.}$$

このとき,

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \quad \frac{x_3}{x_2} - \psi(x_1) = X_3, \quad x_3 = \sum_{i+j\geq 1} b_i x_1^i x_2^j$$

が成り立つ. これらの式から x_1, x_2, x_3 を消去すると $X_3 = \sum_{i+j\geq 1, j\geq 1} b_i X_1^i X_2^j$ を得ることができる. □

Remark. $\Phi(x_1, x_2) := \sum_{i+j\geq 1,\ j\geq 1} b_i x_1^i x_2^j$ とおく. Φ の収束域は空ではないことがわかり, I の十分小の任意の近傍 N に対し, $F(V) \cap N \subset V$ が成り立つ. よって, この V は I を含み F により局所的に不変な曲面である.

References

[1] T. C. Dinh, R. Dujardin and N. Sibony, *On the dynamics near infinity of some polynomial mapping in* $\mathbf{C}^2$, Math. Ann. 333 (2005), 703-739.

[2] J.Noguchi and T. Ochiai, Geometric Function Theory in Several Complex Variables, Japanese edition, Iwanami, Tokyo,(1984); English Translation, Transl. Math. Mono. 80, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1990).

[3] I. R. Shafarevic, *Basic Algebraic Geometry Vols I and II*, Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[4] T. Shinohara, *Existence of invariant manifolds at an indeterminate point*, Suurikaiseki kenkyuusho Koukyuroku,1586 (2008), 109–117.

[5] T. Shinohara, *Another construction of a Cantor bouquet at a fixed indeterminate point*, Kyoto Journal of Mathematics, to appear.

[6] Y. Yamagishi, *Cantor bouquet of holomorphic stable manifolds for a periodic indeterminate point*, Nonlinearity, 14 (2001), 113–120.

[7] Y. Yamagishi, *On the local convergence of Newton's method*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 55 (2003), 897–908.